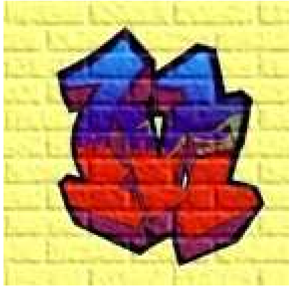
Matemática



4° año secundario



Matrices y sus operaciones

Operaciones básicas

- ✓ **Adición**

La única regla que hay para la suma de matrices es que **ambas tienen que tener el mismo número de filas y de columnas**, y no importa si son rectangulares o cuadradas.

Lo que se hace es **sumar los elementos de cada posición de una matriz con los de la misma posición de la otra**, por lo que la matriz resultante es una con el mismo número de filas y columnas que las participantes y cuyos valores son la suma de los valores de las matrices participantes.

Por ejemplo:

Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = S = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Como ves se suman los elementos de la matriz que ocupan el mismo lugar (tienen los mismos subíndices), la matriz resultante tiene en su posición $s_{1,1}$ la suma de la posición $a_{1,1}$ de la primera matriz mas la $b_{1,1}$ de la segunda, y así se van poniendo todas las sumas de las posiciones.

NOTA: Los vectores pueden ser considerados matrices.

No se pueden sumar matrices con diferentes dimensiones (distinta cantidad de filas o columnas).

En la carpeta externa al encuentro con el nombre “Suma de matrices con Excel” te mostramos como se trabaja en Excel para la suma de matrices.

- ✓ **Sustracción**

La única regla que hay para la **resta** de matrices es que ambas tienen que tener el **mismo número de filas y de columnas**, y no importa si son rectangulares o cuadradas.

Lo que se hace es restar el **coeficiente** de cada posición de una matriz con el **coeficiente** de la misma posición en la misma de la otra, por lo que la matriz resultante es una con el mismo número de filas y columnas que las demás y cuyos valores son la resta de los valores de las otras dos matrices.

Sean A y B las mismas matrices usadas en la adición, procedamos a obtener la matriz resta **A- B**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 3-0 & 2-5 \\ 1-7 & 0-5 & 0-0 \\ 1-2 & 2-1 & 2-1 \end{bmatrix} = R = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -3 \\ -6 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

El proceso es idéntico al de la suma, solo que aquí se restan las posiciones, por eso la matriz resultante en su posición $r_{1,1}$ tiene la resta de la posición $a_{1,1}$ de la primer matriz menos la $b_{1,1}$ de la segunda.

En el *link externo* al encuentro, con el nombre “Resta de matrices con Excel” te mostramos como se trabaja en Excel para la suma de matrices.

Propiedades de la adición

Es una ley de **composición interna** con las siguientes propiedades:

- Asociativa: **A+(B+C) = (A+B)+C**
- Conmutativa: **A+B=B+A**
- Elem. neutro: (matriz cero $0_{m\times n}$), **0+A=A+0=A**
- Elem. simétrico: (matriz opuesta -A) , **A + (-A) = (-A) + A = 0**

¡¡ *La suma y diferencia de dos matrices NO está definida si sus dimensiones son distintas.* !!

✓ Producto de una matriz por un escalar

Dada una **matriz *A* y un escalar *c***, su **producto** *c.A* se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de *A* (i.e. $(cA)[i, j] = cA[i, j]$).

Sean $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ y el escalar c = 3

$$3.A = 3 * \begin{bmatrix} -1 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.(-1) & 3.8 & 3.5 \\ 3.2 & 3.1 & 3.3 \end{bmatrix} = P = \left[\begin{bmatrix} -3 & 24 & 15 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}\right]$$

Propiedades del producto matriz - escalar

Sean *A* y *B* matrices y ***c*** y ***d*** escalares.

- Clausura: **Si A es matriz y c es escalar, entonces c.A es matriz**.
- Asociatividad: **(cd)A = c(dA)**
- Elemento Neutro: **1·A = A**
- Distributividad:

De escalar: **c(A+B) = cA+cB**
De matriz: **(c+d)A = cA+dA**

✓ Multiplicación de matrices

La multiplicación de matrices es un poco más complicada; pero no te asustes, sólo respirá profundo y concentrate.

El **producto** de dos matrices se puede definir solo si el **número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha**.

Si *A* es una matriz ***m×n*** y *B* es una matriz ***n×p***, entonces su **producto matricial** *AB* es la matriz ***m×p*** (***m*** filas, ***p*** columnas) dada por:

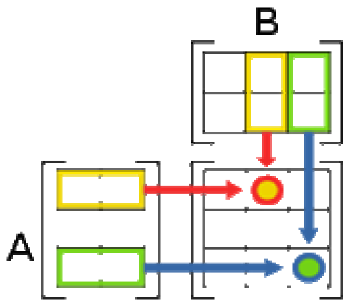
$$(A.B)_{i,j}=A_{i,1}.B_{1,j}+A_{i,2}.B_{2,j}+A_{i,3}.B_{3,j}+\ldots+A_{i,n}.B_{n,j} \quad \text{para cada par i y j}$$

Se puede hacer una multiplicación de una matriz **2x3** por una de **3x5**, y la matriz resultante tiene el número de filas de la primera matriz y las columnas de la segunda, por lo que quedaría una matriz de **2x5**.

Además, a diferencia de la suma y de la resta, la **multiplicación** no es posición por posición, sino que se hace de la siguiente manera:

Se toma la primera fila de la primera matriz y la primera columna de la segunda matriz, y lo que se hace es multiplicar una posición de fila por una de columna:

Para ayudarte a entenderlo te mostramos el siguiente esquema con colores y flechas que muestran fila y columna que debemos multiplicar y sumar para obtener el elemento requerido:



Por ejemplo, sean las matrices A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ de 2 filas por 3 columnas (2x3) y B = $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$ de 3 filas por 2 columnas (3x2)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x3+0x2+2x8 & 1x4+0x(-5)+2x7 \\ -1x3+3x2+1x8 & -1x4+3x(-5)+1x7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$$

El producto AxB es la matriz C= $\begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 11 & -12 \end{bmatrix}$ de 2 filas por 2 columnas (2x2)

En el *link externo* al encuentro con el nombre “Producto de matrices con Excel” te mostramos cómo se trabaja en Excel para la multiplicación de matrices.

Propiedades del producto matriz – matriz

- *Propiedad asociativa*: **(AB)C = A(BC).**
- *Propiedad distributiva por la derecha*: **(A + B)C = AC + BC.**
- *Propiedad distributiva por la izquierda*: **C(A + B) = CA + CB.**

El **producto** de dos matrices generalmente **no** es conmutativo, es decir,

AB ≠ BA.

La división entre matrices, es decir, la operación que podría producir el cociente **A / B**, no se encuentra definida.

Sin embargo, existe el concepto de matriz inversa, solo aplicable a las matrices cuadradas, que permite resolver las mismas cuestiones que la división a través de una multiplicación.

Actividades

Actividad 1

Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Calcular:
1.a.) 3.A
1.b.) .A-B
1.c.) A+B
1.d.) 5.B

Actividad 2

Sean las matrices $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

2.a.) D – C
2.b.) 7.C+2.D
2.c.) 1/3C

Actividad 3

Utilizando las matrices dadas en los ejercicios anteriores, calcular:

3.a) $A*D^t$
3.b) $B*C^t$
3.c) A*B
3.d) Resolvé todos los productos anteriores utilizando Excel.

CLAVE DE LAS ACTIVIDADES

Actividad 1

1.a. 3.A= $\begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \\ 0 & 15 & -9 \\ 21 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

1.b. A-B= $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -116 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

1.c. A+B= $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1.d. 5B= $\begin{pmatrix} -5 & 10 & 20 \\ 10 & 25 & 40 \\ 0 & 5 & -10 \end{pmatrix}$

Actividad 2

2.a. D-C= $\begin{bmatrix} -5 & -9 & 4 \\ 4 & -7 & -1 \end{bmatrix}$

2.b. 7C+2D= $\begin{pmatrix} 7 & -14 & 21 \\ 28 & -35 & -14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 14 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 0 & 19 \\ 28 & -31 & -16 \end{pmatrix}$

2.c. $\frac{1}{3}C = \begin{bmatrix} 2 & \frac{7}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Actividad 3

3.a. A.D^t= $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.(-6)+1.7+2.(-1) & 3.0+1.2+2.(-1) \\ 0.6+5.7+(-3).(-1) & 3.0+5.2+(-3).(-1) \\ 7.6+0.7+4.(-1) & 7.0+0.2+4.(-1) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 23 & 0 \\ 38 & 13 \\ 38 & -4 \end{pmatrix}$

3.b. $B.C^t=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & -5\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}-1.1+2.(-2)+4.3 & -1.4+2.(-5)+4.(-2).\\ 2.1+5.(-1)+8.3 & 2.4+5.(-5)+8.(-2)\\ 0.1+1.(-2)+(-2).3 & 0.4+1.(-5)+(-2).(-2)\end{pmatrix}=$

$\begin{bmatrix}7 & -22\\ 32 & -33\\ -8 & -9\end{bmatrix}$

3.c.

$A.B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 0 & 5 & -3\\ 7 & 0 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 2 & 5 & 8\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}3.(-1)+1.2+2.0 & 3.2+1.5+2.1 & 3.4+1.8+2.(-2)\\ 0.(-1)+5.2+(-3).0 & 0.2+5.5+(-3).1 & 0.4+5.8+(-3),(-2)\\ 7.(-1)+0.2+4.0 & 7.2+0.5+4.1 & 7.4+0.8+4.(-2)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 13 & 16\\ 10 & 22 & 46\\ -7 & 18 & 20\end{bmatrix}$